6.29 Rezept: Matrix invertieren

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ gegeben. Überführe die Matrix

$$(A \mid \mathbb{1}_n)$$

durch Zeilentransformation in eine Matrix

$$(A' \mid B')$$

in der A' Zeilennormalform besitzt.

Falls $A' = \mathbb{1}_n$, so ist A invertierbar mit Inversem B', also $A^{-1} = B'$.

Falls $A' \neq \mathbb{1}_n$, so ist A nicht invertierbar.

6.29' Rezept: Linksinverses finden

Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ gegeben.
Überführe die Matrix

$$(A \mid \mathbb{1}_m)$$

durch Zeilentransformation in eine Matrix

$$(A' \mid B')$$

in der A' Zeilennormalform besitzt.

Falls $A' = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}{m}$, so bilden die ersten n Zeilen B'_n von B' ein Linksinverses von A (d.h. $B'_n \cdot A = \mathbb{1}_n$).

Falls $A' \neq \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}$, so besitzt A kein Linksinverses.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \quad -3$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -3 & 0 & 1\end{array}\right) \quad |\cdot\tfrac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \tfrac{1}{3} & 0\\ 0 & -6 & -3 & 0 & 1\end{array}\right) \quad -2 \quad 6$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 1 & -\tfrac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0 & \tfrac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1\end{array}\right) \quad B_2'$$

$$\underbrace{}_{A'} \qquad \underbrace{}_{B'}$$

Probe: $B_2' \cdot A = \begin{pmatrix}1 & -\tfrac{2}{3} & 0\\ 0 & \tfrac{1}{3} & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Linksinverse sind nicht eindeutig, z.B. auch:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \tfrac{1}{3}\\ 0 & \tfrac{1}{3} & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Beweis, dass Rezept 6.29/6.29' funktioniert:

Zeilentrafo $\hat{=}$ Multiplikation mit Produkt $\underline{E}$ von Elementarmatrizen (Satz 6.20),

also

$$A' = \underline{E} \cdot A$$
$$B' = \underline{E} \cdot \mathbb{1}_m = \underline{E}$$

Falls $A' = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}$, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix} = A' = \underline{E} \cdot A = B' \cdot A,$$

also:

$$\mathbb{1}_n = B'_n \cdot A$$

Falls $A' \neq \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n \\ 0 \end{pmatrix}$ (z.B.: $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

so ist $rk(A) < n$, und aus Rangformel folgt $\ker(f_A) \neq \{\underline{0}\}$.

$$K^n \xrightarrow{f_A} K^m$$

Also ist f_A nicht injektiv, besitzt also kein Linksinverse (Blatt 3, Aufgabe 1). $\square$